Дәріс 5

Гиперболалық типті теңдеулердің жалпы шешімі. Ішектің тербеліс теңдеуі үшін Коши есебі.Даламбер формуласы. Мінездемелік есептер.

Көптеген тербеліс құбылыстары 2-ретті гиперболалық типті дербес туындылы теңдеулерді шешуге келтіріледі. Солардың ішіндегі ең қарапайымы – толқын теңдеуі.

$$U_{tt} = a^2 \Delta U \qquad (1)$$

мұнда Δ - Лаплас операторы, нүкте $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ уақыт $t \in (0, \infty)$, (2,1) теңдеудің шешімі U(x,t) - әдетте толқын деп аталады.

Егер n=1 болса, онда (1) – шектің тербелісін, ал n=2 жағдайында жазық мембрана тербелісі теңдеуін береді.

$$Q(\lambda) = \lambda_0^2 - a^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2$$

болғандықтан,теңдеу (1) гиперболалық типке жатады.

Анықтама: Егерде функция $w(x,t)$ мына

$$Q(gradw) = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2 = 0 \qquad (2)$$

теңдеудің шешуі болса, онда R^{n+1} кеңістінгінде жататын көп бейне $w(x,t)$=0 сипаттаушы бет деп аталады.

Бірінші реттіекінші дәрежелі дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді (2) тікелей шеше қою, яғни сипаттаушы бктте табу оңай емес екені белгілі.

Егер n=1 болса, онда (2) теңдеуді оңай шешуге болады. Себебі сызықсыз теңдеу екі сызықты теңдеулердің көбейтіндісі жіктеледі:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial t} - a\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$$

Сондықтан (2) теңдеудің сипаттаушы қисықтары өзара қиылысытын түзулер жиынтығы $x\text{-}at=c_1 6$ $x+at=c_1$ тұратынына көз жеткізуге болады.

Егер $n \geq 2$ болса, теңдеу (2) шешімдерін тікелей табу қиын, сондада болса, кейбір геометриялық қасиеттерді пайдаланып, (2) теңдеудің сипаттаушы беті болатын көп бейнені табуға болады. Мысалыға, n=2 болғанда бет w(x,y,t)=0 жүргізілген нормальдің бағыттаушы косинустары

$$\mathrm{Cos}(N,x) = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{|\Delta w|}, \quad \cos(N,y) = \frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{|\Delta w|}, \quad \cos(N,t) = \frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{|\Delta w|}$$

формулаларымен анықталатыны белгілі,сондықтан (n=2) сипаттаушы

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - a^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \qquad (3)$$

теңдеудің екі жағын $|\Delta w|^{-2}$ көбейтсек, онда

$$\cos^2(N,t) - a^2\cos^2(N,x) - a^2\cos^2(N,y) = 0 \qquad (4)$$

теңдігін аламыз.

Екінші жағынан бағыттаушы косинустары мына

$$\cos^2(N,t) + \cos^2(N,x) + \cos^2(N,y) = 1 \qquad (5)$$

шартты қанағаттандырады.(4) пен(5) теңдіктерден

$$\cos(N,t)=\frac{\pm a}{\sqrt{1+a^2}}$$

яғни сипаттаушы бет w(x,y,t)=0 кезкелгеннүктесіне жүргізілген $\overline{N}$ нормаль t осімен тұрақты бұрыш жасайды. Егерде a=1 болса, $\left(N\,\hat{}\,t)\right)=\frac{\pi}{4}$ ондай бет тек қана конустың беті екеніне көз жеткізу қиын емес:

$$x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(t-t_0)^2$$

мұндағы $M_0(x_0\ ,y_0\ ,t_0)$ – конустың төбесі .Осы сияқты талдау арқылы (1) теңдеудің сипаттаушы беті

$$a^2(t-t_0)^2=\sum_{i=1}^{n}(x-x_i^0)^2$$

конусы болатынын көреміз.

Жоғарғы (1) толқын теңдеуі үшін қойылатын негізгі есептердің бірі Коши есебі: R^{n+1} кеңістігінде (1) теңдеудің бастапқы

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x) \tag{6}$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек. Коши есебінің шешімдерін анықтайтын формулалар:

Егер n=1 болсаб онда Коши есебінің шешімі Даламбер формуласы бойынша

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x=at}\psi(\xi)d\xi \tag{2,7}$$

анықталады.

Егер n=2 болса, онда Коши есебінің шешімі Пуассон формуласы арқылы

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{K_r}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{K_r}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2(y-\eta)^2}} \tag{8}$$

анықталады, мұндағы K_r – центрі M(x,y) нүктеде, радиусы r = at дөңгелек;

Егер n=3 болса, онда Коши есебінің шешімі Кирхгоф формуласы бойынша

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_r}\frac{\psi(\xi,\eta)}{r}dS_r+\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_r}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{r}dS_r \tag{9}$$

анықталады, мұндағы S_r – центрі M(x,y,z)нүкте ал, радиусы r = ft болатын сфера беті.